

一类变指数离散二阶系统的周期解*

张申贵

西北民族大学数学与计算机科学学院, 甘肃 兰州 730030

摘要: 研究变指数基尔霍夫型离散二阶系统周期解的存在性, 运用临界点理论中的极小作用原理和鞍点定理, 获得了周期解的存在性结果。

关键词: 周期解; 离散 $p(k)$ -Laplace 算子; 变指数; 基尔霍夫问题

中图分类号: O175.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2022) 02-0163-08

Periodic solutions for a class of second-order discrete system with variable exponent

ZHANG Shengui

College of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou 730030, China

Abstract: The existence for periodic solution of Kirchhoff-type second-order discrete system with variable exponent is studied. Some results for existence of periodic solutions are obtained by using the least action principle and the saddle point theorem in critical point theory.

Key words: periodic solution; discrete $p(k)$ -Laplacian operator; variable exponent; Kirchhoff problem

差分方程主要来源于微分方程的离散化, 许多实际问题中都涉及到大量差分方程模型, 这些模型广泛地出现在信息科学、金融学和生物遗传学等科学领域。

临界点理论是非线性泛函分析的重要分支, 许多基于临界点理论的分析方法已成为研究具有变分结构的算子方程可解性的有效工具, 如极小极大方法、下降流不变集结合单调迭代的方法、移动平面法、Nehari 流形方法和指标理论等。Guo 等^[1]建立了二阶差分方程周期解问题的变分结构, 并利用鞍点型临界点定理得到了二阶差分方程周期解的存在性。随后, 该问题引起了学者的兴趣, 很多学者开始利用临界点理论研究离散二阶系统

$$\Delta^2 x(k-1) = \nabla F(k, x(k)), \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

T -周期解的存在性和多重性^[2-6], 其中 \mathbf{Z} 表示整数集, T 为正整数, 记 $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$ 表示向前差分算子。位势函数 $F: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$, 且 $\nabla F(k, x) = \nabla_x F(k, x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right)$ 。当位势函数满足次二次增长时, 文献[2-3]得到了系统(1)周期解的存在性结果。当具有部分周期位势和次线性增长非线性项时, 文献[4]讨论了系统(1)周期解的多重性。当非线性项满足线性增长条件时, 即设存在常数 $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, 使得

$$|\nabla F(k, x)| \leq L_1 |x| + L_2, \quad (2)$$

* 收稿日期: 2020-09-11 录用日期: 2020-12-17 网络首发日期: 2021-06-02

基金项目: 国家自然科学基金(11401473); 甘肃省自然科学基金(17JR5RA284); 西北民族大学中央高校基本科研业务费(31920180041); 西北民族大学引进人才科研项目(xbmuyjrc201907)

作者简介: 张申贵(1980年生), 男; 研究方向: 非线性泛函分析和偏微分方程; E-mail: zhangshengui315@163.com

对所有 $(k, x) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^N$ 成立。文献[5-6]中得到了系统(1)周期解和多重周期解的可解性定理。文献[7]利用指标理论得到了非线性二阶差分方程边值问题多重解的存在性结果。文献[8]应用 Schaefer 不动点定理获得了一类分数阶差分方程解的存在性结果, 同时得到了方程的解具有 Ulam 稳定性。

本文研究变指数离散二阶系统

$$\begin{cases} M(\Psi(x)) \Delta \left(|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)-2} \Delta x(k-1) \right) = \nabla F(k, x(k)), & k \in \mathbf{Z}[1, T], \\ x(0) - x(T+1) = \Delta x(0) - \Delta x(T) = 0, \\ \Psi(x) = \sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)}, \end{cases} \quad (3)$$

T -周期解的存在性, 其中 T 为正整数, \mathbf{Z} 表示整数集, 且 $\mathbf{Z}[a, b] := \mathbf{Z} \cap [a, b]$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \leq b$. 设函数 $M(s): [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 为连续函数, 记 $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$ 表示向前差分算子。对所有 $x \in \mathbf{R}^N$, 位势函数 F 关于 k 是 T -周期的, 且对所有 $k \in \mathbf{Z}$, 设 $F: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ 关于 x 连续可微。设 $p(k): \mathbf{Z}[0, T] \rightarrow (1, +\infty)$ 满足 $p(t) = p(t+T)$, 且 $1 < p^- := \min_{k \in \mathbf{Z}[0, T]} p(k) \leq p^+ := \max_{k \in \mathbf{Z}[0, T]} p(k) < +\infty$.

对比文献[1-8]中研究的离散系统问题, 问题(3)具有以下特点: 首先, 问题(3)中带有变指数算子, 即离散 $p(k)$ -Laplace 算子 $\Delta \left(|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)-2} \Delta x(k-1) \right)$. 变指数方程可以刻画“逐点异性”物理现象, 利用此类方程可以研究一些源于非线性弹性问题和流体力学的数学模型^[9-10]. 其次, 问题(3)中的方程带有

非局部系数 $M \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right)$, 这导致问题(3)中的方程不再是一个逐点成立的等式, 此类问题常被

称为基尔霍夫型方程, 该方程可以更精确地刻画生态学中的一些依赖于自身平均密度的过程。当非局部系数 $M(s) \equiv 1$, 空间维数 $N = 1$, 且具有凸位势或有界非线性项时, 文献[11]讨论了系统(3)的周期解的存在性。当非局部系数 $M(s) \equiv 1$ 且具有部分周期位势时, 文献[12]利用广义鞍点定理得到了系统(3)的多重解存在的充分条件。另外, 本文的可解性条件与已有文献不同, 我们考虑用一类控制函数 $H(|x|)$ 替换线性增长条件(2)中的 $|x|$, 从而得到更一般的生长条件。

本文中, 先将系统(3)的周期解转化为定义在离散变指数 Sobolev 空间上一个泛函的临界点。对比已有研究, 问题(3)对应的能量泛函的形式选取是不同的。再利用临界点理论中的极小作用原理和鞍点定理证明变指数离散二阶系统(3)至少一个 T -周期解的存在性定理。

1 准备知识

定义 1^[11] 设 $p(k): \mathbf{Z}[0, T] \rightarrow (1, +\infty)$ 满足 $p(0) = p(T)$. 记

$$l^{p(k)} = \left\{ x(k): \mathbf{Z}[0, T+1] \rightarrow \mathbf{R}^N \mid \sum_{k=1}^{T+1} |x(k)|^{p(k)} < +\infty \right\},$$

范数为 $|x|_{p(k)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \sum_{k=1}^{T+1} \left| \frac{x}{\lambda} \right|^{p(k)} < 1 \right\}$.

定义 2^[11] 定义离散变指数 Sobolev 空间

$$E = \{x \in l^{p(k)} \mid \Delta x(k-1) \in l^{p(k)}, x(0) = x(T+1)\},$$

且 $\tilde{E} = \left\{ x \in E \mid \bar{x} := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x(k) = 0 \right\}$. 对 $x \in E$, 记范数 $\|x\| = |\bar{x}| + \|\tilde{x}\|_{p(k)}$ 为 E 的等价范数, 其中 $\bar{x} \in \mathbf{R}^N$, $\tilde{x}(k) = x(k) - \bar{x} \in \tilde{E}$. 易见, E 和 \tilde{E} 为有限维空间, $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{x}\|_{p(k)}$, 且 $E = \mathbf{R}^N \oplus \tilde{E}$.

引理 1^[12] 记 $p^- = \min_{k \in \mathbf{Z}[0, T]} p(k)$, 对于 $x \in E$, 有

$$\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow |\bar{x}| + \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow +\infty. \tag{4}$$

引理 2^[12] 对于 $\tilde{x} \in \tilde{E}$ 和 $x \in E$, 存在常数 $C_0 > 0$, 有

$$\|\tilde{x}\| \leq \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p}} + 1, \tag{5}$$

$$\|\tilde{x}\|_{\infty} \leq C_0 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p}} + C_0. \tag{6}$$

定义 3^[13] 设 X 为 Banach 空间, 若泛函 $\phi \in C^1(X, \mathbf{R})$ 满足: 对任何点列 $\{u_n\} \subset X$, 由 $\{\phi(u_n)\}$ 有界, $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), 蕴含 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 则称泛函 ϕ 满足 (PS) 条件。

引理 3^[13] (极小作用原理) 若泛函 $\phi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 弱下半连续, 且 ϕ 在自反的 Banach 空间 X 中强制, 即当 $\|u\| \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\phi(u) \rightarrow +\infty$, 则泛函 ϕ 在空间 X 中有极小值。

引理 4^[13] (鞍点定理) 设 E 为 Hilbert 空间, $E = E_1 \oplus E_2$, 其中 $E_2 \neq \{0\}$ 为 E 的有限维子空间。若泛函 $\phi \in C^1(X, \mathbf{R})$ 满足 (PS) 条件和以下两个条件

- (i) 存在 $e \in B_\rho \cap E_2$ 和常数 $\omega > \sigma$, 使得 $\phi|_{e+E_1} \geq \omega$;
- (ii) 存在常数 σ 和 ρ , 使得 $\phi|_{\partial B_\rho \cap E_2} \leq \sigma$,

则泛函 ϕ 有临界值 $c \geq \omega$ 且 $\inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in B_\rho \cap E_1} \phi(h(x))$, 其中 $\Gamma = \{h \in C(\bar{B}_\rho \cap E_1, E): h|_{\partial B_\rho \cap E_1} = \text{id}_{\partial B_\rho \cap E_1}\}$, id 表示恒等算子, B_ρ 是 E 中以 0 为中心半径为 ρ 的开球, ∂B_ρ 表示 B_ρ 的边界。

2 主要结果

在空间 E 上定义能量泛函 $\phi: E \rightarrow \mathbf{R}$ 如下

$$\phi(x) = \widehat{M} \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) + \sum_{k=1}^T F(k, x(k)), \quad x \in E,$$

其中 $\widehat{M}(s) = \int_0^s M(t) dt$. 则 ϕ 弱下半连续且连续可微, 且

$$\begin{aligned} \langle \phi'(x), y \rangle &= M \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) \sum_{k=1}^{T+1} \left(|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)-2} \Delta x(k-1), \Delta y(k-1) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^T (\nabla F(k, x(k)), y(k)), \quad x, y \in E. \end{aligned}$$

因此, $x \in E$ 是问题(3)的 T -周期解等价于 x 是泛函 ϕ 的临界点。

假设以下条件成立:

- (M₁) 设存在常数 $m_0 > 0$, 使得 $M(s) \geq m_0$ 对所有 $s \in [0, +\infty)$ 成立。
- (M₂) 记 $\widehat{M}(s) = \int_0^s M(t) dt$, 使得 $\widehat{M}(s) \leq M(s)s$ 对所有 $s \in [0, +\infty)$ 成立。
- (H) 设存在常数 $K_0 > 0, K_1 > 0, K_2 > 0$ 和非负函数 $H \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$, 使得
 - (i) $H(s) \leq H(t), \quad s \leq t, s, t \in [0, +\infty)$;
 - (ii) $H(s+t) \leq K_0(H(s) + H(t)), \quad s, t \in [0, +\infty)$;
 - (iii) $0 \leq H(s) \leq K_1 s^{p-1} + K_2, \quad s \in [0, +\infty)$;
 - (iv) 当 $H(s) \rightarrow +\infty$ 时, 有 $H(s) \rightarrow +\infty$.

(F₁) 设存在 $f, g: \mathbf{Z}[0, T] \rightarrow \mathbf{R}^+$ 满足 $\sum_{k=1}^T f(k) < \frac{m_0}{(2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- p^+}$ 使得

$$|\nabla F(k, x)| \leq f(k)H(|x|) + g(k),$$

对所有 $(k, x) \in \mathbf{Z}[1, T] \times \mathbf{R}^N$ 成立, 其中 $p^- := \min_{k \in \mathbf{Z}[0, T]} p(k)$, $p^+ := \max_{k \in \mathbf{Z}[0, T]} p(k)$.

(F₂) 若 $\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^+} = 1$, 则 $\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^T F(k, x)}{H^{q^+}(|x|)} > \frac{1}{q^+} \left(\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right)^{q^+}$.

(F₃) 若 $L = \left(1 + \frac{2}{p^+ p^- - 1}\right) \frac{1 + \frac{1}{p^-}}{q^+} \left(\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right)^{q^+}$, 则 $\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^T F(k, x)}{H^{q^+}(|x|)} < -L$.

定理 1 设条件 (M₁), (H), (F₁) 和 (F₂) 成立, 则问题 (3) 有一个 T -周期解。

定理 2 设条件 (M₁), (M₂), (H), (F₁) 和 (F₃) 成立, 则问题 (3) 有一个 T -周期解。

注 1 令非局部系数 $M(s) = 1 + ks^m$, $s \in [0, +\infty)$, k 和 m 为正常数, 则 $M(s)$ 满足条件 (M₁) 和 (M₂)。

注 2 线性增长条件 (2) 对应于条件 (F₁) 中 $p(k) = 2$, $H(s) = s$ 的特殊情形。取 $M(s) = 1$, $p(k) = 2$, 则 $p^- = p^+ = 2$, 令 $F(k, x) = \left(\frac{3T}{5} - k\right) \ln^2(|x|^2 + 1) + \ln(|x|^2 + 1)$ 及 $H(|x|) = \ln(|x|^2 + 1)$, 则 F 满足条件 (F₁) 和 (F₂), 但不满足线性增长条件 (2), 也不满足文献 [1-8, 11-12] 中定理的条件。

注 3 取 $M(s) = 1 + s$, $p(k) = \sin \frac{2\pi k}{T} + 5$, 则 $p^- = 4$, $q^+ = \frac{4}{3}$, 令 $F(k, x) = \left(\frac{2T}{5} - k\right) |x|^4 + T^3 |x|^2$ 及 $H(|x|) = |x|^3$, 则 M 和 F 满足定理 2 中的条件, 但不满足文献 [1-8, 11-12] 中定理的条件。

定理 1 的证明 由条件 (H), (F₁) 和式 (6), 有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^T F(k, x(k)) - \sum_{k=1}^T F(k, \bar{x}) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^T \int_0^1 (\nabla F(k, \bar{x} + s\tilde{x}(k)), \tilde{x}(k)) ds \right| \leq \sum_{k=1}^T \int_0^1 |(\nabla F(k, \bar{x} + s\tilde{x}(k)), \tilde{x}(k))| ds \\ &\leq \sum_{k=1}^T \int_0^1 f(k)H(|\bar{x} + s\tilde{x}(k)|) |\tilde{x}(k)| ds + \sum_{k=1}^T \int_0^1 g(k) |\tilde{x}(k)| ds \\ &\leq \sum_{k=1}^T \int_0^1 f(k)K_0 [H(|\bar{x}|) + H(|\tilde{x}(k)|)] |\tilde{x}(k)| ds + \sum_{k=1}^T \int_0^1 g(k) |\tilde{x}(k)| ds \\ &\leq K_0 \sum_{k=1}^T \int_0^1 f(k) [H(|\bar{x}|) + K_1 |\tilde{x}(k)|^{p^- - 1} + K_2] |\tilde{x}(k)| ds + \sum_{k=1}^T \int_0^1 g(k) |\tilde{x}(k)| ds \\ &\leq H(|\bar{x}|) \|\tilde{x}\|_\infty K_0 \sum_{k=1}^T f(k) + \|\tilde{x}\|_\infty^{p^-} K_0 K_1 \sum_{k=1}^T f(k) + \|\tilde{x}\|_\infty \left[K_0 K_2 \sum_{k=1}^T f(k) + \sum_{k=1}^T g(k) \right] \\ &\leq H(|\bar{x}|) \left[C_0 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} + C_0 \right] K_0 \sum_{k=1}^T f(k) + \left[C_0 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} + C_0 \right]^{p^-} K_0 K_1 \sum_{k=1}^T f(k) \\ &\quad + \left[C_0 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} + C_0 \right] \left[K_0 K_1 \sum_{k=1}^T f(k) + \sum_{k=1}^T g(k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 \sum_{k=1}^T f(k) \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} + C_3 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} + C_4 H(|\bar{x}|) + C_5 \\ &\quad + K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k) H(|\bar{x}|) \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}}. \end{aligned} \tag{7}$$

由条件(F₁)知 $\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k) > 0$. 利用 Young 不等式及 $\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^+} = 1$, 可得

$$\begin{aligned} &K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k) H(|\bar{x}|) \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &\leq \frac{1}{q^+} \left[\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt[p^-]{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right]^{q^+} H^{q^+}(|\bar{x}|) + \frac{1}{p^-} \left[\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k) \right] \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

从而有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^T F(k, x(k)) - \sum_{k=1}^T F(k, \bar{x}) \right| &\leq \frac{m_0}{p^- p^+} \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} + C_3 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &\quad + \frac{1}{q^+} \left[\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt[p^-]{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right]^{q^+} H^{q^+}(|\bar{x}|) + C_4 H(|\bar{x}|) + C_5. \end{aligned} \tag{9}$$

由条件(M₁)和式(9), 有

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \tilde{M} \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) + \left[\sum_{k=1}^T F(k, x(k)) - \sum_{k=1}^T F(k, \bar{x}) \right] + \sum_{k=1}^T F(k, \bar{x}) \\ &\geq \frac{m_0}{p^+} \left(1 - \frac{1}{p^-} \right) \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} - C_3 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &\quad + \left[\frac{\sum_{k=1}^T F(k, \bar{x})}{H^{q^+}(|\bar{x}|)} - \frac{1}{q^+} \left[\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt[p^-]{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right]^{q^+} \right] H^{q^+}(|\bar{x}|) - C_4 H(|\bar{x}|) - C_5. \end{aligned} \tag{10}$$

由引理 1, 条件(H)和(F₂), 及 $p^- > 1$, 当 $\|x\| \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\phi(x) \rightarrow +\infty$. 并注意到 $p^- > 1$ 时, 空间 E 是自反的 Banach 空间, 且泛函 ϕ 弱下半连续, 由引理 3(极小作用原理)可知, 泛函 ϕ 至少有一个临界点, 从而问题(3)至少有一个 T -周期解。

定理 2 的证明 记 $\tilde{E} = \left\{ x \in E \mid \bar{x} := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x(k) = 0 \right\}$, $E = \mathbf{R}^N \oplus \tilde{E}$. 对 $x(k) \in E$, 有 $x(k) = \bar{x} + \tilde{x}(k)$, $\bar{x} =$

$\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x(k) \in \mathbf{R}^N$, $\tilde{x}(k) \in \tilde{E}$. 下面利用引理 4(鞍点定理)来证明定理 2。

第 1 步 证明泛函 ϕ 满足(PS)条件, 即对任何点列 $\{x_n\} \subset E$, 由 $\{\phi(x_n)\}$ 有界, $\phi'(x_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), 蕴含 $\{x_n\}$ 有收敛子列。首先证明 $\{x_n\}$ 在 E 中有界。

类似于式(9)的证明有

$$\left| \sum_{k=1}^T (\nabla F(k, x(k)), \tilde{x}(k)) \right| \leq \frac{m_0}{p^- p^+} \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} + C_6 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ + \frac{1}{q^+} \left(\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right)^{q^+} H^{q^+}(|\bar{x}|) + C_5 H(|\bar{x}|) + C_7. \quad (11)$$

由条件(M₁)和式(11), 有

$$\|\tilde{x}_n\| \geq \langle \phi'(x_n), \tilde{x}_n \rangle \\ = M \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) \sum_{k=1}^T |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} + \sum_{k=1}^T (\nabla F(k, x_n(k)), \tilde{x}_n(k)) \\ \geq m_0 \left(1 - \frac{1}{p^- p^+} \right) \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} - C_6 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ - \frac{1}{q^+} \left(\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right)^{q^+} H^{q^+}(|\bar{x}_n|) - C_5 H(|\bar{x}_n|) - C_7. \quad (12)$$

又由式(6)得

$$C_0 \left[\left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} + 1 \right] \geq \|\tilde{x}_n\|. \quad (13)$$

结合式(12), (13)有

$$\frac{1}{q^+} \left(\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right)^{q^+} H^{q^+}(|\bar{x}_n|) + C_5 H(|\bar{x}_n|) \\ \geq m_0 \left(1 - \frac{1}{p^- p^+} \right) \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} - C_8 \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} - C_7 \\ \geq \frac{m_0}{2} \left(1 - \frac{1}{p^- p^+} \right) \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} - C_9, \quad (14)$$

其中 $C_9 = -\min_{s \in [0, +\infty)} \left\{ \frac{m_0}{2} \left(1 - \frac{1}{p^- p^+} \right) s^{p^-} - C_8 s - C_7 \right\} > 0$. 从而有

$$\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \leq \frac{\frac{1}{q^+} \left(\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right)^{q^+} H^{q^+}(|\bar{x}_n|) + C_{10} H(|\bar{x}_n|) + C_{11}}{\frac{m_0}{2} \left(1 - \frac{1}{p^- p^+} \right) \left(\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)} \right)^{q^+}}. \quad (15)$$

由条件(M₂)和式(12)有

$$\begin{aligned} \widehat{M} \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) &\leq M \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) \sum_{k=1}^T \frac{|\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \\ &\leq \frac{1}{p^-} M \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \\ &\leq \frac{1}{p^-} \left[\|\tilde{x}_n\| - \sum_{k=1}^T (\nabla F(k, x_n(k)), \tilde{x}_n(k)) \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

利用式(11), (13), (15)~(16)得

$$\begin{aligned} \widehat{M} \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) &\leq \frac{1}{p^-} \frac{m_0}{p^+} \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} + C_{12} \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^+}} \\ &\quad + \frac{1}{p^- q^+} \left(\frac{K_0 C_0 \sum_{k=1}^T f(k)}{\sqrt{\frac{m_0}{p^+} - (2C_0)^{p^-} K_0 K_1 p^- \sum_{k=1}^T f(k)}} \right)^{q^+} H^{q^+}(|\bar{x}_n|) + C_{13} H(|\bar{x}_n|) + C_{14}. \end{aligned} \tag{17}$$

由式(9), (15)和(17)得

$$\begin{aligned} \phi(x_n) &= \widehat{M} \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) + \left[\sum_{k=1}^T F(k, x_n(k)) - \sum_{k=1}^T F(k, \bar{x}_n) \right] + \sum_{k=1}^T F(k, \bar{x}_n) \\ &\leq \left[L + \frac{\sum_{k=1}^T F(k, \bar{x})}{H^{q^+}(|\bar{x}|)} \right] H^{q^+}(|\bar{x}_n|) + C_{15} H(|\bar{x}_n|) + C_{16} H^{q^+}(|\bar{x}_n|) + C_{17} H^{p^-}(|\bar{x}_n|) + C_{18}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 L 为条件 (F_3) 中定义的常数。

反设 $\{x_n\}$ 在 E 中无有界, 不妨设当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\|x_n\| \rightarrow +\infty$. 由引理 1, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\|x_n\| \rightarrow +\infty \Rightarrow |\bar{x}_n| + \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \rightarrow +\infty.$$

若当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $|\bar{x}_n| \rightarrow +\infty$, 由条件 (H) , 有 $H(|\bar{x}_n|) \rightarrow +\infty$. 又由条件 (F_3) 和式(18), 并注意到 $q^+ > 1$ 及 $p^- > 1$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时有 $\phi(x_n) \rightarrow -\infty$. 若当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\sum_{k=1}^T |\Delta x_n(k-1)|^{p(k-1)} \rightarrow +\infty$. 结合式(15), 有 $H(|\bar{x}_n|) \rightarrow +\infty$. 由条件 (F_3) 和式(18), 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\phi(x_n) \rightarrow -\infty$. 这与 $\{\phi(x_n)\}$ 有界矛盾, 故 $\{x_n\}$ 在 E 中有界. 由于为有限维空间, $\{x_n\}$ 在 E 中有收敛子列, 故泛函 ϕ 满足 (PS) 条件.

第 2 步 取 $E_1 = \tilde{E}$, $E_2 = \mathbf{R}^N$, 则 $E = \mathbf{R}^N \oplus \tilde{E}$. 我们证明鞍点定理的环绕条件成立.

对 $x \in E_1$, 类似于式(9)的证明, 有

$$\left| \sum_{k=1}^T F(k, x(k)) - \sum_{k=1}^T F(k, 0) \right| \leq \frac{m_0}{p^-} \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} + C_{19} \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} + C_{20}. \tag{19}$$

由式(19)得

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \widehat{M} \left(\sum_{k=1}^{T+1} \frac{|\Delta x(k-1)|^{p(k-1)}}{p(k-1)} \right) + \left[\sum_{k=1}^T F(k, x(k)) - \sum_{k=1}^T F(k, 0) \right] + \sum_{k=1}^T F(k, 0) \\ &\geq \frac{m_0}{p^+} \left(1 - \frac{1}{p^-} \right) \sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} - C_{19} \left(\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{p(k-1)} \right)^{\frac{1}{p^-}} - C_{21}. \end{aligned}$$

对 $x \in E_1 = \tilde{E}$, 由引理 1 知, 当 $\|x\| \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta x(k-1)|^{\rho(k-1)} \rightarrow +\infty$, 注意到 $p^- > 1$, 当 $\|x\| \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\phi(x) \rightarrow +\infty$. 取 $e = 0$, 对 $x \in E_1 = \tilde{E}$, 存在常数 $\omega > \sigma$ 使得 $\phi|_{e+E_1} \geq \omega$.

另外, 对 $y \in E_2 = \mathbf{R}^N$, 由条件 (F_3) , 对任给 $\varepsilon > 0$, 当 $|y|$ 充分大时, 有

$$\phi(y) = \sum_{k=1}^T F(k, y) \leq (-L + \varepsilon) H^q(|y|).$$

当 $|y| \rightarrow +\infty$ 时, $H(|y|) \rightarrow +\infty$. 取 ε 充分小, 则有 $\phi(y) \rightarrow -\infty$. 从而存在常数 ρ 使得 $\phi|_{\partial B_\rho \cap E_2} \leq \omega - 1 = \sigma$.

综上所述, 泛函 ϕ 满足引理 4(鞍点定理)中所有条件. 由引理 4 知, 泛函 ϕ 至少有 1 个临界点, 从而问题(3)至少有一个 T -周期解。

参考文献:

- [1] GUO Z M, YU J S. The existence of periodic and subharmonic solutions of subquadratic second order difference equations [J]. J London Math Soc, 2003, 68(2): 419-430.
- [2] XUE Y F, TANG C L. Existence of a periodic solution for subquadratic second-order discrete Hamiltonian systems [J]. Nonlinear Anal Theory Methods Appl, 2007, 67: 2072-2080.
- [3] MAWHIN J. Periodic solutions of second order nonlinear difference systems with ϕ -Laplacian: a variational approach [J]. Nonlinear Anal Theory Methods Appl, 2012, 75(1): 4672-4687.
- [4] YAN S H, WU X P, TANG C L. Multiple periodic solutions for second-order discrete Hamiltonian systems [J]. Appl Math Comput, 2014, 234: 142-149.
- [5] JIANG Q, MA S, HU Z H. Existence of multiple periodic solutions for second-order discrete Hamiltonian systems with partially periodic potentials [J]. Electron J Differ Equ, 2016, 307: 1-15.
- [6] WANG D B, GUO M. Multiple periodic solutions for second-order discrete Hamiltonian systems [J]. J Nonlinear Sci Appl, 2017, 10: 410-418.
- [7] 连福云, 徐远通. 一类二阶非线性差分方程边值问题的多重解[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2010, 49(5): 30-33.
- [8] 王金华, 向红军, 赵育林. 一类非线性分数阶差分方程边值问题解的存在性及 Ulam 稳定性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(2): 1-6.
- [9] ZHIKOV V. On some variational problems [J]. Russ J Math Phys, 1997, 5(1): 105-116.
- [10] RUZICKA M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [11] BEREANU C, JEBELEAN P, SERBAN C. Periodic and Neumann problems for discrete $p(\cdot)$ -Laplacian [J]. J Math Anal Appl, 2013, 399(1): 75-87.
- [12] ZHANG S G. Periodic solutions for discrete $p(k)$ -Laplacian systems with partially periodic potential [J]. Adv Differ Equ, 2018, 242: 1-15.
- [13] MAWHIN J, WILLEM M. Critical point theory and Hamiltonian systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

(责任编辑 冯兆永)